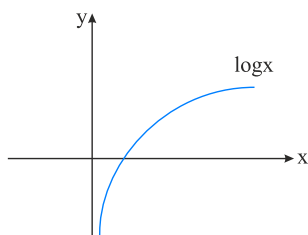
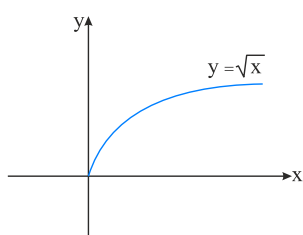




نمودار توابع را رسم می‌کنیم:
گزینه "۱": تابع اکسترمم نسبی ندارد.

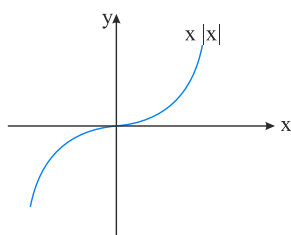


گزینه "۲": $x = 0$ ابتدای بازه دامنه است و اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

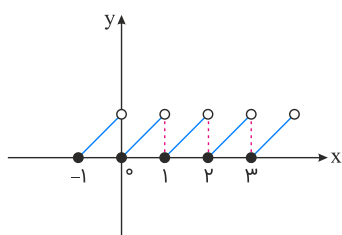


گزینه "۳": تابع اکسترمم نسبی ندارد.

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

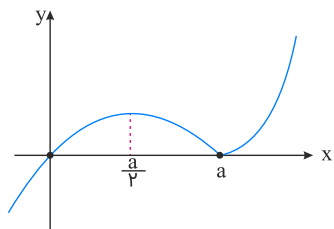


گزینه "۴": تابع در نقاط با طول صحیح min نسبی دارد.



ابتدا به کمک بازه‌بندی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} x^2 - ax & ; x \geq a \\ -x^2 + ax & ; x < a \end{cases}$$



بنابراین مختصات نقطه $\min$ و $\max$ برابر است با:

$$\max : \left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right) \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} \right)$$

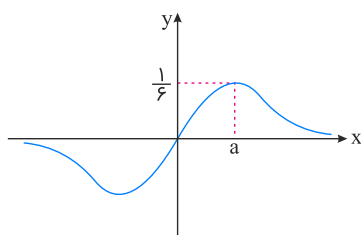
$$\min : (a, 0)$$

حال فاصله دو نقطه را برابر با $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{a^2}{4}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\frac{a^2}{4} = t} t + t^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \\ t = -2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = -2 \Rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

باتوجه به نمودار، واضح است که ماکزیمم مطلق این تابع که در نقطه بحرانی $x = a$ اتفاق افتاده است، برابر با $\frac{1}{6}$ می باشد؛ به عبارتی $f(a) = \frac{1}{6}$.
ببینید:



$$f(x) = \frac{x}{x^2 + k} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + k) - (2x)(x)}{(x^2 + k)^2} = \frac{k - x^2}{(x^2 + k)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} k - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k} \xrightarrow{x=a>0} x = \sqrt{k}$$

باتوجه به شکل

حالا می دانیم:

$$f(\sqrt{k}) = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{k + k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{k} = 3 \Rightarrow k = 9$$

اول نقاط بحرانی تابع را پیدا می کنیم:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

مقدار تابع را در نقاط بحرانی پیدا می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} f(-3) = 1 \\ f(-2) = 0 \Rightarrow \min \\ f(0) = \sqrt[3]{4} \Rightarrow \max \end{array} \right\} \Rightarrow \max + \min = \sqrt[3]{4}$$

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، قدر مطلق‌ها را برداشته و تابع را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} \overbrace{x(x^2 - 4)}^{x^3 - 4x} & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ \underbrace{-x(x^2 - 4)}_{-x^3 + 4x} & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ -3x^2 + 4 & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

ابتدا ضابطه اول را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

چون این دو ریشه به دست آمده در دامنه $x > 2$ یا $x < -2$ قرار ندارد، پس در ضابطه اول اکسترم نسبی و نقطه بحرانی وجود ندارد. حال ضابطه دوم را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$-3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (\text{ریشه ساده})$$

ضابطه دوم مشتق، دارای ۲ ریشه ساده بوده که متعلق به دامنه آن می‌باشد. در نتیجه ضابطه دوم دارای ۲ نقطه بحرانی است. در آخر به سراغ نقاط مرزی $x = -2$ و $x = 2$ می‌رویم. داریم:

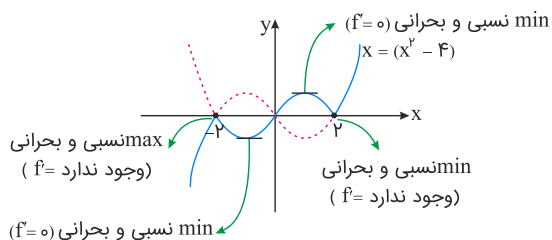
$$f'_-(-2) = 8, f'_+(-2) = -8 \Rightarrow f'(-2) = \text{وجود ندارد}$$

چون در نقطه $x = -2$ ، مشتق تابع از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، پس $x = -2$ ، طول ماکزیمم نسبی تابع f بوده و چون مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند، پس مشتق در $x = -2$ وجود نداشته و در نتیجه نقطه بحرانی محسوب می‌شود. حال به سراغ نقطه $x = 2$ می‌رویم. داریم:

$$f'_-(2) = -8, f'_+(2) = 8 \Rightarrow f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

باتوجه به توضیحات قبل، نقطه $x = 2$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f بوده و نقطه بحرانی نیز محسوب می‌شود. پس نمودار تابع f دارای ۴ اکسترم نسبی و ۴ نقطه بحرانی است. روش دوم: نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x|x^2 - 4| = \begin{cases} x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2) & ; x \leq -2 \text{ یا } x \geq 2 \\ -x(x^2 - 4) = -x(x - 2)(x + 2) & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$



پس ۴ اکسترمم نسبی و ۴ نقطه بحرانی دارد.

گزینه ۴

۶

$x = 2$ نقطه بحرانی f است، پس مشتق f در این نقطه، صفر است:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + a)(x + 1) - 1(x^2 + ax + 5)}{(x + 1)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(2)=0} (4 + a)(3) - (4 + 2a + 5) = 0 \Rightarrow 12 + 3a - 9 - 2a = 0 \Rightarrow a = -3$$

با جایگذاری $a = -3$ ، ضابطه f' را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 3)(x + 1) - (x^2 - 3x + 5)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 - x - 3 - x^2 + 3x - 5}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم و اکسترمم‌های نسبی آن را مشخص می‌کنیم:

ریشه مرتبه زوج

x	-4	-1	2		
f'	+	0	-	0	+
f	↗	↘	↗	↘	↗
	max		min		

مقدار max نسبی تابع f به ازای $x = -4$ رخ می‌دهد:

$$\max(f) = f(-4) = \frac{16 + 12 + 5}{-4 + 1} = \frac{33}{-3} = -11$$

$$f(x) = x^2|x| - x^2 = \begin{cases} x^3 - x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^3 - x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

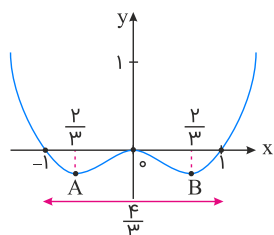
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x = x(3x - 2) & ; x > 0 \\ -3x^2 - 2x = x(-3x - 2) & ; x < 0 \end{cases}$$

برای پیدا کردن اکسترم‌های نسبی تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. هرکدام از ضابطه‌ها را در فاصله خودش تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$x(3x - 2)$		-	+
$x(-3x - 2)$	-	+	
f'	-	+	-
f	min	max	min

پس تابع در نقاطی به طول‌های $x = -\frac{2}{3}$ و $x = \frac{2}{3}$ مینیمم نسبی دارد.

چون در این نقاط تابع $f(x) = x^2|x| - x^2$ عرض یکسانی دارد، فاصله این دو نقطه برابر فاصله طول آن‌ها باهم خواهد بود.

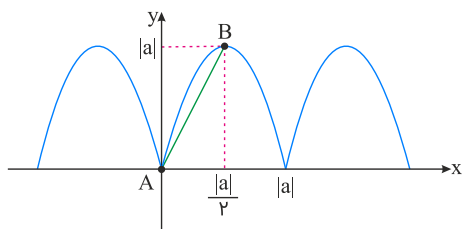


$$\text{فاصله مینیمم نسبی‌ها} = AB = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

دوره تناوب تابع f را حساب می‌کنیم:

$$T_f = \frac{\pi}{\left| \frac{\pi}{a} \right|} = |a|$$

نمودار تابع f به صورت زیر است:



نقاط A و B ، دو نقطه اکسترمم نسبی متوالی تابع f هستند. طول AB را به کمک رابطه فیثاغورس حساب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} |a| = \sqrt{5} \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

برای به دست آوردن نقاط اکسترمم‌های مطلق (نقاط بیشترین و کمترین مقدار تابع) بایستی طول تمام نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس عرض آن‌ها را محاسبه کنیم. پس از آن بیشترین مقدار به عنوان $\max$ مطلق و کمترین مقدار به عنوان $\min$ مطلق خواهد بود. (دقت کنید ابتدا و انتهای بازه بسته نقاط بحرانی محسوب می‌شوند).

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Rightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [m, 3m] \times \\ x = 2m \in [m, 3m] \end{cases}$$

پس طول نقاط بحرانی تابع به صورت $x = m, 2m, 3m$ می‌باشند. حال با محاسبه عرض آن‌ها، داریم:

$$f(m) = m^3 - 3m^3 + 1 = -2m^3 + 1$$

$$f(2m) = 8m^3 - 12m^3 + 1 = -4m^3 + 1 \xrightarrow{\min \text{ مطلق}} (2m, -4m^3 + 1)$$

$$f(3m) = 27m^3 - 27m^3 + 1 = 1 \xrightarrow{\max \text{ مطلق}} (3m, 1)$$

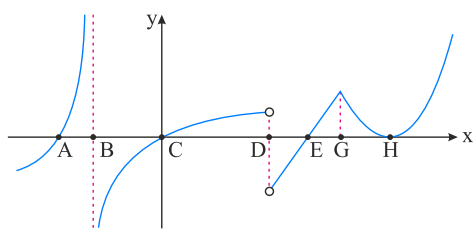
$$\text{شیب خط واصل} = \frac{(1) - (-4m^3 + 1)}{3m - 2m} = \frac{4m^3}{m} = 4m^2$$

هر نقطه‌ای از دامنه تابع f در آن مشتق تابع (یعنی f') صفر باشد یا f' در آن موجود نباشد، نقطه بحرانی محسوب می‌شود. در نقاط بحرانی که علامت f' از مثبت به منفی، تغییر علامت دهد، آن نقطه، ماکزیمم نسبی تابع f است و اگر f' در نقطه‌ای از منفی به مثبت، تغییر علامت دهد، آن نقطه، مینیمم نسبی تابع f می‌باشد.

بحرانی‌ها: H, E, D, C, B, A (۶ نقطه بحرانی)

$\max$ نسبی: B و D (۲ تا نقطه ماکزیمم نسبی)

$\min$ نسبی: A, C و E (۳ تا نقطه مینیمم نسبی)



ابتدا نمودار ضابطه پایین را رسم کنید. می‌دانید:

$$\frac{2x}{|x|} \xrightarrow{x \geq 0} \frac{2x}{x} = 2$$

پس برای رسم، کافی است تابع ثابت $y = 2$ را در $x \geq 0$ رسم کنید.

اما رسم نمودار ضابطه بالا کمی سخت است. به تحلیل زیر دقت کنید:

واضح است که طبق مفهوم براکت، همواره می‌توان نوشت: $[x] \leq x$

و از آنجاکه در این سؤال، $x < 0$ است، داریم: $[x] \leq x < 0$

با تقسیم طرفین این نامساوی به $[x]$ که در $x < 0$ حتماً عددی منفی است، جهت نامساوی عوض شده و لذا:

$$1 \geq \frac{x}{[x]} > 0$$

پس خروجی این تابع به ازای $x < 0$ همواره در بازه $(0, 1]$ و به ازای $x > 0$ مقدار ثابت ۲ است، بنابراین می‌توان ادعا کرد

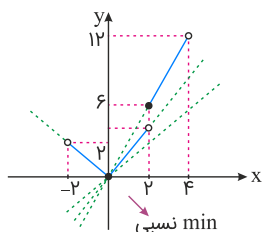
که ماکزیمم مطلق این تابع برابر ۲ است و مینیمم مطلق ندارد (چون هیچ وقت واقعاً صفر نمی‌شود).

ابتدا به کمک بازه‌بندی، نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$-۲ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{x}{۲} < ۰ \xrightarrow{[\frac{x}{۲}] = -۱} f(x) = (-x)(-۱ + ۲) = -x$$

$$۰ \leq x < ۲ \Rightarrow ۰ \leq \frac{x}{۲} < ۱ \xrightarrow{[\frac{x}{۲}] = ۰} f(x) = (x)(۰ + ۲) = ۲x$$

$$۲ \leq x < ۴ \Rightarrow ۱ \leq \frac{x}{۲} < ۲ \xrightarrow{[\frac{x}{۲}] = ۱} f(x) = (x)(۱ + ۲) = ۳x$$



بنابراین باتوجه به شکل، تنها در $x = ۰$ ، $\min$ نسبی وجود دارد.

چون دامنه تعریف تابع بازه $[-1, 3]$ است، در نتیجه اگر عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم، جواب نامعادله حاصل به صورت $-1 \leq x \leq 3$ خواهد بود. پس -1 و 3 ، ریشه‌های عبارت زیر رادیکال (یعنی عبارت $-x^2 + ax + b$) بوده و با مفهوم S و P داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -1 + 3 = 2 \xrightarrow{S=a} a = 2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = -1 \times 3 = -3 \xrightarrow{P=-b} -b = -3 \Rightarrow b = 3$$

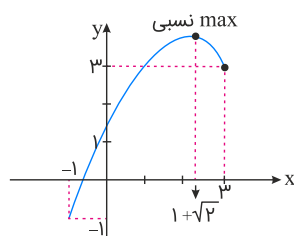
پس ضابطه تابع به صورت $f(x) = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ است. حال از ضابطه تابع مشتق گرفته و ریشه ساده صورت مشتق را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\frac{d}{dx}(-x^2 + 2x + 3)}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} - x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} &= x - 1 \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1} -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \\ \div 2 \rightarrow x^2 - 2x - 1 &= 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \cancel{\neq 1} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} &\Rightarrow \text{اکسترم ساده} \end{aligned}$$

حال برای تعیین مقدار تابع در نقطه اکسترم نسبی آن، $x = 1 + \sqrt{2}$ را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$y_{\text{اکسترم}} = f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{\underbrace{-(1 + \sqrt{2})^2}_{-1 - 2\sqrt{2} - 2} + \underbrace{2(1 + \sqrt{2})}_{2 + 2\sqrt{2}} + 3} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} \simeq 3.8$$

چون مقدار تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنه تعریف تابع (یعنی $f(-1) = -1$ و $f(3) = 3$) از مقدار اکسترم نسبی کمتر است، پس قطعاً عرض نقطه اکسترم از عرض نقاط همسایگی خود، بیشتر بوده و در نتیجه نوع نقطه اکسترم نسبی تابع، ماکزیمم نسبی می‌باشد.



ریشه‌های f' در بازه $[-۱, ۴]$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^4}{۴} - ۲x^۲ + k \Rightarrow f'(x) = x^۳ - ۴x \xrightarrow{f'(x)=0} x^۳ - ۴x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^۲ - ۴) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} \times$$

مقدار f را در نقاط بحرانی (جاهایی که $f' = 0$ و ابتدا و انتهای بازه) حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(0) = k \\ f(۲) = ۴ - ۸ + k = k - ۴ \Rightarrow \text{min مطلق} \\ f(-۱) = \frac{1}{۴} - ۲ + k = k - \frac{۷}{۴} \\ f(۴) = ۶۴ - ۳۲ + k = k + ۳۲ \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

مقدار $\max$ مطلق، ۵ برابر $\min$ مطلق است، پس:

$$k + ۳۲ = ۵(k - ۴) \Rightarrow k + ۳۲ = ۵k - ۲۰ \\ \Rightarrow ۴k = ۵۲ \Rightarrow k = ۱۳$$

$$y = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱} \Rightarrow y' = \frac{۲x}{۳ \sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	0	
y'	-	+
y	min	

مینیم تابع در $x = 0$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$y(0) = -۱$$